Teorema de Cauchy-Goursat

Definição: Diz-se que dois caminhos γ e $\tilde{\gamma}$ são **homotópicos** no domínio Ω se existe uma aplicação contínua $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tal que

- $H(0,t) = \gamma(t) \quad 0 \leq t \leq 1,$
- $H(1,t) = \tilde{\gamma}(t) \quad 0 \leq t \leq 1.$

Diz-se que são **caminhos homotópicos fechados** se $H(s,0) = H(s,1)$ para todo $0 \leq s \leq 1$.
Diz-se que são **caminhos homotópicos de extremos fixos** $z_0, z_1 \in \Omega$ se $H(s,0) = z_0$ e $H(s,1) = z_1$ para todo $0 \leq s \leq 1$.

Teorema da Deformação (Cauchy-Goursat): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa no domínio D_f e $\gamma, \tilde{\gamma}$ dois caminhos homotópicos em D_f, fechados ou de extremos fixos. Então

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz.$$

Em particular, se γ for um caminho fechado homotópico a um ponto em D_f tem-se

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Fórmulas Integrais de Cauchy

Definição: Seja γ um caminho fechado e z_0 um ponto que não pertence à curva percorrida por γ. Então, chama-se **índice** de γ relativamente ao ponto z_0 ao valor dado por

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz.$$

Proposição: Seja γ um caminho fechado e z_0 um ponto que não pertence à curva percorrida por γ. Então:

i) $I(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$.

ii) Se $\tilde{\gamma}$ é homotópica a γ em $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ então $I(\gamma, z_0) = I(\tilde{\gamma}, z_0)$.

Teorema (Fórmula Integral de Cauchy): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa na região D_f e seja γ um caminho fechado homotópico a um ponto em D_f. Se $z_0 \in D_f$ é um ponto que não pertence à curva percorrida por γ tem-se

$$f(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Em particular, se γ percorre uma curva de Jordan uma vez no sentido positivo e z_0 está no lado de dentro da curva, tem-se

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Teorema (Fórmulas Integrais de Cauchy para Derivadas): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa na região D_f, então f é infinitamente diferenciável em D_f. Seja γ um caminho fechado homotópico a um ponto em D_f e $z_0 \in D_f$ um ponto que não pertence à curva percorrida por γ, tem-se

$$\frac{d^k f}{dz^k}(z_0) \cdot I(\gamma, z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Em particular, se γ percorre uma curva de Jordan uma vez no sentido positivo e z_0 está no lado de dentro da curva, tem-se

$$\frac{d^k f}{dz^k}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$